1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı: **21.01.2025**

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{3x}}{x}\,dx$ has olmayan integralinin çeşidini ve karakterini belirleyiniz (10 puan).

2) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(\cos(nx))^2}{n^2}$ biçiminde verilen fonksiyon serisinin düzgün yakınsak olup olmadığını araştırınız (15 puan).

3) $\mathbb{R}^2$ de verilen $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{n^5+3}, \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} \right)$ serisinin karakterini belirleyiniz (15 puan).

4) $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ de Öklid normu olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz (10 puan).

5) Her $x \in (-1,1)$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ serisinin yakınsak olduğu fonksiyonu bulunuz (10 puan).

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını bulunuz (15 puan).

7) Aşağıda boş bırakılan yerlere **Doğru** veya **Yanlış** yazınız (25 puan).

a) $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ ve $\|\cdot\|_1$ normları denk normlardır….Doğru…

b) $\mathbb{R}^n$ de kapalı ve sınırlı bir küme dizisel kompakttır….Doğru..

c) $\mathbb{R}^n$ de tek nokta kümeleri açık kümelerdir…..Yanlış…

d) $\mathbb{R}^n$ de verilen bir küme hem açık hem de kapalı olamaz……Yanlış….

e) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de bir metriktir. …Doğru..

Not: 7. sorudaki her şık 5 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

CEVAP ANAHTARI

1) 1. çeşit has olmayan integraldir. $\forall x \in [1, +\infty)$ için

$f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x} > 0$ olup $g(x) = \dfrac{1}{x}$ alınırsa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^{3x}}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{3x} = +\infty$$

olur. Ayrıca $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ has olmayan integralinde $p = 1$

olduğundan p- testi gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ ıraksaktır. O halde limit karşılaştırma

testinden $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{x}\,dx$ integrali ıraksaktır.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \dfrac{1 + \cos^2(nx)}{n^2}$ olsun.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le \cos^2(nx) \le 1$ olup

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1 + \cos^2(nx)}{n^2} \right| \le \frac{1 + |\cos^2(nx)|}{n^2} \le \frac{2}{n^2} = M_n$$

denirse $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ serisinde $p = 2 > 1$ olduğundan

bu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-serisi yakınsaktır. O halde Weierstrass M- kriterinden

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n_1} = \dfrac{n^3}{n^5+3}$ ve $a_{n_2} = \dfrac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$ olsun.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$ serisini alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n_2} > 0$ dır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alınırsa $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n_1}}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$$

3. cevabın devamı)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left[2+\sqrt{\frac{n+2}{n}}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\sqrt{\frac{n+2}{n}}} = \frac{1}{3}$$

olur. Burada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisinde $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan

bu p-serisi ıraksaktır. O halde limit karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

Bu takdirde $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{n^5+2}, \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}\right)$ ıraksaktır.

4) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| = \|x-y+y\| \quad (N_4 \text{ den})$$
$$\leq \|x-y\| + \|y\|$$

olup

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \ldots (1)$$

yazılır. Yine

$$\|y\| = \|y-x+x\| \quad (N_4 \text{ den})$$
$$\leq \|y-x\| + \|x\| \quad (N_3 \text{ den})$$
$$= \|x-y\| + \|x\|$$

olup

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\| \iff -\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \ldots (2)$$

olur. Böylece (1) ve (2) den

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$$

elde edilir.

5) $\forall x \in (-1,1)$ için $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ olduğu bilinmektedir.

Kuvvet serilerinin yakınsaklık aralıklarında terim terim türevlenebilir olması dikkate alınırsa

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

olup $\forall x \in (-1,1)$ için

$$x.\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

elde edilir. O halde verilen seri $\forall x \in (-1,1)$ için $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ fonksiyonuna yakınsaktır.

6) Bu kuvvet serisi için $x_0 = 0$ merkezdir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = (-1)^n n^2$ olup kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun.

O halde $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n.n^2}{(n+1)^2(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$

bulunur. Böylece kuvvet serisi $|x|<1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ aralığında yakınsaktır.

$x_1 = -1$ olsun. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.n^2(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$

serisi bulunur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = n^2$ alınırsa $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ olup

genel terim testinden $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksaktır.

Şimdi $x_2 = 1$ olsun. O halde $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ serisi bulunur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$c_n = (-1)^n.n^2$ alınırsa n tek iken $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$, n çift iken $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$

olduğundan (c_n) dizisinin limiti yoktur. Böylece genel terim testinden $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ıraksaktır. Bu takdirde $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2.x^n$ kuvvet serisinin

yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ elde edilir.